Διάρκεια διαγωνίσματος 50 λεπτά. Κλειστές όλες οι σημειώσεις. Οι αποδείξεις σας να είναι πλήρεις και να φαίνεται καθαρά τι υποθέτετε ως γνωστό. Έχει μεγάλη σημασία και το πώς γράφετε.

Δεύτερο διαγώνισμα, 28 Νοεμβρίου 2011

Πρόβλημα 1. Αποδείξτε με συνδυαστικό τρόπο (χωρίς δηλ. να κάνετε πράξεις με τους διωνυμικούς συντελεστές) την ισότητα

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{A}{j}\binom{B}{r-j} = \binom{A+B}{r}.$$

Λύση: Το δεξί μέλος μετράει τα υποσύνολα του $[A+B] = \{1, 2, \ldots, A+B\}$ μεγέθους r. Αυτά διαμερίζονται στις κλάσεις S_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, r$, όπου τα υποσύνολα της κλάσης C_j είναι αυτά που έχουν j στοιχεία ανάμεσα στα $1, 2, \ldots, A$, και άρα έχουν $r - j$ στοιχεία ανάμεσα στα $A+1, A+2, \ldots, A+B$. Για να κατασκευάσουμε ένα από τα σύνολα της κλάσης C_j επιλέγουμε ένα j-μελές υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, A\}$ και ένα $(r-j)$-μελές υποσύνολο του $\{A+1, A+2, \ldots, A+B\}$. Αφού οι επιλογές αυτές γίνονται ανεξάρτητα η μια από την άλλη προκύπτει ότι

$$|C_j| = \binom{A}{j}\binom{B}{r-j},$$

και άρα

$$\binom{A+B}{r} = \sum_{j=0}^{r} |C_j| = \sum_{j=0}^{r} \binom{A}{j}\binom{B}{r-j}.$$

Πρόβλημα 2. Ένα σύνολο κορυφών A ενός γραφήματος G λέγεται *ανεξάρτητο* αν κάθε δύο κορυφές τού A δε συνδέεονται με ακμή του G. Επίσης, ένα σύνολο κορυφών B λέγεται *κάλυμμα* αν κάθε ακμή του γραφήματος G περιέχει κάποια από τις κορυφές του B.

Δείξτε ότι σ' ένα γράφημα $G = (V, E)$ το σύνολο κορυφών $A \subseteq V$ είναι ανεξάρτητο αν και μόνο αν το σύνολο κορυφών $V \setminus A$ (οι κορυφές που δεν είναι στο A) είναι κάλυμμα.

Λύση: Έστω $A \subseteq V$ ανεξάρτητο και uv μια ακμή του G. Έπεται ότι δε γίνεται και το u και το v να ανήκουν στο A (αλλιώς το A δε θα ήταν ανεξάρτητο). Δείξαμε ότι κάθε ακμή έχει τουλάχιστον μια κορυφή στο $V \setminus A$, άρα το $V \setminus A$ είναι κάλυμμα.

Αν το $V \setminus A$ είναι κάλυμμα και $u, v \in A$ τότε αυτές δε μπορούν να συνδέονται με ακμή (αλλιώς αυτή η ακμή δε θα είχε κορυφή στο $V \setminus A$ και αυτό αντιφάσκει με το ότι το $V \setminus A$ είναι κάλυμμα). Άρα το A είναι ανεξάρτητο.

Πρόβλημα 3. Έστω απλό γράφημα $G = (V, E)$ και κορυφή του u. Ορίζουμε το σύνολο

$$V(k) = \{v \in V : \ d(u, v) = k\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

(Αυτές είναι οι κορυφές του G που βρίσκονται σε απόσταση ακριβώς k από την κορυφή u.)

Αν ο μέγιστος βαθμός των κορυφών του G είναι ο d δείξτε με επαγωγή ως προς k ότι

$$|V(k)| \le d(d-1)^{k-1}, \quad \text{για } k = 1, 2, \ldots.$$

Λύση: Για $k = 1$ πρέπει να δείξουμε $|V(1)| \le d$. Όμως το σύνολο κορυφών $V(1)$ είναι εκείνες οι κορυφές που συνδέονται με την u, και άρα $|V(1)| = \deg u \le d$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $|V(k)| \le d(d-1)^{k-1}$ για κάποιο $k \ge 1$ και θα δείξουμε ότι

$$|V(k+1)| \le d(d-1)^k.$$

Κάνουμε κατ' αρχήν την παρατήρηση ότι, για κάθε $n \ge 1$, κάθε κορυφή $v \in V(n)$ ενώνεται με μια (τουλάχιστον) κορυφή του συνόλου $V(n-1)$. (Για να το δούμε αυτό απλά κοιτάμε ένα ελάχιστο μονοπάτι από την u στη v. Η προτελευταία κορυφή αναγκαστικά ανήκει στο $V(n-1)$.)

Εφαρμόζοντας αυτό στις κορυφές του $V(k)$ προκύπτει ότι κάθε τέτοια κορυφή έχει τουλάχιστον μια ακμή προς το $V(k-1)$ και άρα το πολύ $d-1$ ακμές προς κορυφές του $V(k+1)$. Με άλλα λόγια, κάθε κορυφή του $V(k)$ "γεννά" το πολύ $d-1$ κορυφές του $V(k+1)$. Άρα

$$|V(k+1)| \le |V(k)|(d-1).$$

Εφαρμόζοντας την επαγωγική μας υπόθεση στην προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε το ζητούμενο.