

Διάρκεια διαγωνίσματος 50 λεπτά. Κλειστές όλες οι σημειώσεις.

Οι αποδείξεις σας να είναι πλήρεις και να φαίνεται καθαρά τι υποθέτετε ως γνωστό.

Έχει μεγάλη σημασία και το πώς γράφετε.

Πρώτο διαγώνισμα, 31 Οκτωβρίου 2010

**Πρόβλημα 1.** Βρείτε το συντελεστή του μονωνύμου  $x^k y^l z^{n-k-l}$  στο ανάπτυγμα του  $(x+y+z)^n$ . Εκφράστε την απάντησή σας σαν ένα πολυωνυμικό συντελεστή.

**Λύση:** Το  $(x+y+z)^n$  είναι το γινόμενο από  $n$  παράγοντες, όλοι ίσοι με  $x+y+z$ . Όταν κάνουμε όλες τις δυνατές πράξεις ανάμεσα σε αυτούς του παράγοντες είναι σα να παίρνουμε με όλους τους δυνατούς τρόπους από ένα προσθετέο από κάθε παράγοντα, να τους πολλαπλασιάζουμε μεταξύ τους και να προσθέτουμε το μονώνυμο που προκύπτει στο γενικό άθροισμα. Το μονώνυμο  $x^k y^l z^{n-k-l}$  μπορεί να προκύψει από αυτή τη διαδικασία μόνο αν έχουμε επιλέξει τον προσθετέο  $x$  από  $k$  από τους  $n$  παράγοντες και τον προσθετέο  $y$  από  $l$  από τους  $n$  παράγοντες (αυτό βέβαια συνεπάγεται ότι έχουμε επιλέξει το  $z$  από τους υπόλοιπους  $n-k-l$  παράγοντες). Αυτό μπορεί να γίνει με  $\binom{n}{k, l, n-k-l}$  τρόπους.

**Πρόβλημα 2.** Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε υποσύνολα  $A, B, C, D \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$  έτσι ώστε να ισχύει  $A \subseteq B$ ,  $C \subseteq D$  και  $B \cap D = \emptyset$ ;

**Λύση:** Αρκεί να επιλέξει κανείς ξένα μεταξύ τους σύνολα  $A, B \setminus A, C, D \setminus C$ . Τα σύνολα  $B = A \cup (B \setminus A)$  και  $D = C \cup (D \setminus C)$  έχουν τότε αυτόματα τις ιδιότητες που θέλουμε. Αυτό μπορεί να γίνει με  $5^k$  τρόπους μια και για καθένα από τα  $k$  στοιχεία του συνόλου  $\{1, 2, \dots, k\}$  πρέπει να επιλέξουμε αν θα το βάλουμε σε ένα από τα σύνολα  $A, B \setminus A, C, D \setminus C, \{1, 2, \dots, k\} \setminus (B \cup D)$  (5 επιλογές).

**Πρόβλημα 3.** Σε μια χώρα με  $n$  πόλεις πρόκειται να ανοιχθεί ένα δίκτυο δρόμων. Κάθε δύο πόλεις μπορούν να συνδέονται με ένα δρόμο ή με κανένα. Πόσα διαφορετικά δυνατά δίκτυα δρόμων υπάρχουν;

**Λύση:** Για κάθε ζεύγος πόλεων πρέπει να αποφασίσουμε αν θα συνδέονται μεταξύ τους με δρόμο ή όχι (2 επιλογές). Αφού υπάρχουν  $\binom{n}{2}$  ζεύγη πόλεων οι επιλογές μας είναι  $2^{\binom{n}{2}} = 2^{n(n-1)/2}$ .