

Άσκηση 5.12

Σε ένα διτερέλι γράφημα  $G$  σύνολα κορυφών  $A$  και  $B$   
ισχύει  $|N(v)| \geq |S| - 5 \quad \forall v \in A$ .

Δείξτε ότι υπάρχει ταίριασμα  $M$  που να περιέχει  
πιο πολύ  $|A| - 5$  κορυφές του  $A$ .

Λύση

Προσθέτουμε 5 νέες κορυφές στο  $B$   
και ομοίως συνδέουμε με ακμή  
με κάθε κορυφή του  $A$ .



Για το νέο  $G$  διτερέλι γράφημα εύκολα  
βλέπουμε ότι ισχύει η συνθήκη του Hall  
 $|N(S)| \geq |S| \quad \forall S \subseteq A$ .

Από το θεώρημα του Γάου, υπάρχει πλήρες  
ταίριασμα για την πλευρά  $A$ .

Σε αυτό το ταίριασμα κάποιες κορυφές του  $A$ ,  
το πολύ 5,

έχουν ταίριασθεί με κάποιες από τις νέες κορυφές του  
 $B$ .

Αν αφαιρέσουμε τις ακμές αυτές (που δεν υπάρχουν  
στο αρχικό  $G$  γράφημα)

από το ταίριασμα προκύπτει ένα ταίριασμα του αρχικού  
 $G$  γράφηματος στο οποίο υπάρχουν το πολύ 5 αταίριαστές  
κορυφές του  $A$ .