3.8

Η συνάρτηση $g(n) = \binom{n+k-1}{k} - \binom{n}{k}$ είναι πολυώνυμο του n διότι είναι διαφορά 2 πολυωνύμων αφού γνωρίζουμε ότι το $\binom{n}{k}$ είναι πολυώνυμο και όμοια είναι και το $\binom{n+k-1}{k}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η $g(n)$ έχει την εξής μορφή :

$$g(n) = \frac{n}{k!}\left((n+k-1)(n+k-2)...(n+2)(n+1) - (n-1)(n-2)...(n-k+2)(n-k+1)\right)$$

και ορίζουμε
$f(n) = (n+k-1)(n+k-2)...(n+2)(n+1) = n^{k-1} + an^{k-2} + ... + qn^2 + wn^1 + z$

παρατηρούμε τώρα ότι
$f(-n) = (n-1)(n-2)...(n-k+2)(n-k+1)$.

Άρα τελικά έχουμε ότι $g(n) = \frac{n}{k!}(f(n) - f(-n))$.
Αν k άρτιος $(k = 2s)$ :

Για την $f(n)$ έχουμε ότι $f(n) = n^{2s-1} + an^{2s-2} + ... + qn^2 + wn^1 + z$ και

$f(-n) = n^{2s-1} - an^{2s-2} + ... - qn^2 + wn^1 - z$

οπότε η διαφορά $f(n) - f(-n)$ θα περιέχει μόνο άρτιες δυνάμεις του n δηλαδή

$f(n) - f(-n) = 2n^{2s-2} + 2cn^{2s-4} + ... + 2qn^2 + 2z$

Άρα η $g(n)$ θα είναι :

$$g(n) = \frac{n}{k!}\left(2n^{2s-2} + 2cn^{2s-4} + ... + 2qn^2 + 2z\right) = \frac{1}{k!}\left(2n^{2s-1} + 2cn^{2s-3} + ... + 2qn^3 + 2zn\right)$$

Οπότε θα περιέχει μόνο περιττές δυνάμεις του n για k άρτιο.

Αν k περιττός $(k = 2s+1)$ :

Για την $f(n)$ έχουμε ότι $f(n) = n^{2s} + an^{2s-1} + ... + qn^2 + wn^1 + z$ και

$f(-n) = n^{2s} - an^{2s-1} + ... + qn^2 - wn^1 + z$

οπότε η διαφορά $f(n) - f(-n)$ θα περιέχει μόνο περιττές δυνάμεις του n δηλαδή

$f(n) - f(-n) = 2n^{2s-1} + 2bn^{2s-3} + ... + 2pn^3 + 2wn^1$

Άρα η $g(n)$ θα είναι :

$$g(n) = \frac{n}{k!}\left(2n^{2s-1} + 2bn^{2s-3} + ... + 2pn^3 + 2wn^1\right) = \frac{1}{k!}\left(2n^{2s} + 2bn^{2s-2} + ... + 2pn^4 + 2wn^2\right)$$

Οπότε θα περιέχει μόνο άρτιες δυνάμεις του n για k περιττό.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι :

Για k άρτιο το πολυώνυμο $g(n)$ περιέχει μόνο περιττές δυνάμεις του n ενώ,

για k περιττό το $g(n)$ περιέχει μόνο άρτιες δυνάμεις του n.

Τέλος για να υπολογόσουμε το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου αυτου, παίρνουμε για $n = 1$ την παράσταση $P(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$ η οποία γίνεται :

$$P(1,k) = \binom{1+k-1}{k} = \binom{k}{k} = 1$$

άρα βλέπουμε ότι το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου αυτού είναι 1.