Ασκηση 3.18

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

→ Συνδιαστική απόδειξη...

Το $\binom{2n}{n}$ συμβολίζει με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω n στοιχεία από το $\{1, 2, \dots, 2n\}$

Αν το $\{1, 2, \dots, 2n\}$ το χωρίσω σε δύο ομάδες που η κάθε μία έχει n στοιχεία, έστω:

$$\{1, 2, \dots, n\} \cup \{n+1, \dots, 2n\}$$

και απο την πρώτη επιλέξω k στοιχεία τοτε απο την δεύτερη θα επιλέξω $n-k$ στοιχεία.

Αρα για k σταθερό, αυτό μπορεί να γίνει με: $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}^2$ τρόπους.

→ Αλγεβρική απόδειξη...

$p(x)=a_n x^n+\dots+a_1 x+a_0$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}$$

Παρακάτω θα δουλέψω για το κάθε μέρος της ισότητας αυτής χωριστά.

Αριστερό μέρος:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k\frac{1}{x^{2n-k}}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^{-2n+2k}$$

Σταθερός όρος = Συντελεστής του x^0

Άρα θέλουμε $-2n+2k=0 \Rightarrow k=n$

Άρα ο σταθερός όρος στο παραπάνω ανάπτυγμα δίνεται από το $\binom{2n}{n}$

Δεξί μέρος:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n\left(x+\frac{1}{x}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\frac{1}{x^{n-k}}\cdot\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m\frac{1}{x^{n-m}}=$$

Βάζω διαφορετικά απλά για να μην μπερδευτώ.

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{-n+2k}\cdot\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^{-n+2m}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{m}x^{-2n+2k+2m}$$

Σταθερός όρος:

Θέλουμε $-2n+2k+2m=0$

Για $k=0$: $-2n+0+2m=0 \Rightarrow m=n$

Για $k=1$: $-2n+2+2m=0 \Rightarrow m=n-1$

$\vdots$

Για k : $-2n+2k+2m=0 \Rightarrow m=n-k$

$\vdots$

Για $k=n$: $\cancel{-2n}+\cancel{2n}+2m=0 \Rightarrow m=0$

Άρα ο σταθερός όρος στο παραπάνω άθροισμα είναι:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}\binom{n}{1} + \binom{n}{n}\binom{n}{0} =$$

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Εξισώνοντας τους σταθερούς όρους στα δύο αναπτύγματα έχουμε

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$