ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΗ

Ο παρονομαστής $a_1 \dots a_k$ *έχει τιμή ίση με 1(το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού), όταν* $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa\} = \emptyset$

Συνεπώς το άθροισμα που καλούμαστε να αποδείξουμε μπορεί να γραφεί στην εξής μορφή:

$$\sum_{\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\kappa\}\subseteq[n]} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k} = n$$

και θα αναφερόμαστε μόνο στα <u>μη κενά</u> υποσύνολα του $[n]$ *από εδώ και πέρα*

Ας αποδείξουμε λοιπόν ότι η ισότητα ισχύει:

για $n = 1$ *η δοσμένη ισότητα ισχύει καθώς το μοναδικό <u>μη κενό</u> υποσύνολο του {1} είναι ο εαυτός του άρα* $\frac{1}{1}$ *=1 η ισότητα ισχύει*

για $n = 2$ *έχουμε τρία <u>μη κενά</u> υποσύνολα του {1,2}, τα οποία είναι {1},{2},{1,2}*

Άρα το άθροισμα μας θα είναι $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} = 2$ *η ισότητα ισχύει και για* $n = 2$

Ας υποθέσουμε ότι η παραπάνω ισότητα ισχύει για το σύνολο $[m]$ *δηλαδή:*

$$\sum_{\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\kappa\}\subseteq[m]} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k} = m$$

Αρκεί να αποδείξουμε χρησιμοποιώντας την προηγούμενη υπόθεση ότι η ισότητα ισχύει και για το σύνολο $[m+1]$

Κάθε <u>μη κενό</u> υποσύνολο του συνόλου $[m+1]$ *θα ανήκει σε μια από τις τρείς κατηγορίες:*

- *Θα είναι ένα σύνολο που θα περιέχει στοιχεία του* $[m]$ *και το στοιχείο* $m+1$
- *Θα είναι ένα μή κενό υποσύνολο του* $[m]$
- *Θα είναι το μονοσύνολο* $\{m+1\}$

Για την πρώτη κατηγορία, σε όλους τους παρονομαστές του κλάσματος εμφανίζεται το $m+1$ *αν παραγοντοποιήσουμε θα μείνει η ισότητα της επαγωγικής υπόθεσης, άρα το συγκεκριμένο άθροισμα ισούται με* $\frac{m}{m+1}$*.*

Για την δεύτερη κατηγορία, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, συμπεραίνουμε άμεσα ότι το αποτέλεσμα είναι m*.*

Τέλος για το σύνολο $\{m+1\}$ *το άθροισμα είναι* $\frac{1}{m+1}$

Άρα $\sum_{\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\kappa\}\subseteq[m+1]} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k} = m + \frac{m}{m+1} + \frac{1}{m+1} = m+1$