Ασκηση 1.18

Για $n \geq 0$ και $0 \leq k \leq n$ $\;\; \forall k \in \{0, \dots, n\}$: $\dfrac{d^k}{dx^k} x^n = \dfrac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k}$.

Για $k=0$: $x^n = \dfrac{n!}{(n-0)!} \cdot x^n$ ισοδύναμα

$x^n = x^n$ που ισχύει.

Για $n = 1$, $k \in \{0, 1\}$: $x' = \dfrac{1!}{(1-1)!} x^{1-1}$ ισοδύναμα

$1 = 1$ που ισχύει.

Έστω $P(n)$: Για $k = 0, 1, \dots, n$

$$\frac{d^k}{dx^k} x^n = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Έστω ότι ισχύει η $P(n)$ και θέλω να δείξω ότι ισχύει η $P(n+1)$

όπου $P(n+1)$: Για $\ell = 0, 1, \dots, n+1$

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} x^{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-\ell)!} x^{n+1-\ell}$$

Για $\ell=0$: $x^{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-0)!} x^{n+1}$ ισοδύναμα

$$x^{n+1} = x^{n+1} \quad \text{που ισχύει.}$$

Για $\ell \geq 1$: $\frac{d^\ell}{dx^\ell} x^{n+1} = \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}} \left(\frac{d}{dx} x^{n+1} \right)$

$$= \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}} (n+1) x^n = (n+1) \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}} x^n \stackrel{(*)}{=}$$

Αφού $1 \leq \ell \leq n+1$ έχουμε ότι $0 \leq \ell-1 \leq n$

άρα από επαγωγική υπόθεση:

$$\stackrel{(*)}{=} (n+1) \frac{n!}{(n-(\ell-1))!} \cdot x^{n-(\ell-1)}$$

$$= (n+1) \frac{n!}{(n+1-\ell)!} x^{n+1-\ell}$$

$$= \frac{(n+1)!}{((n+1)-\ell)!} x^{(n+1)-\ell}$$