

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως αντιγραφή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Ενδιάμεσο διαγώνισμα - 4 Νοεμβρίου 2019

Όλες οι καμπύλες είναι θετικά προσανατολισμένες εκτός αν προσδιορίζεται διαφορετικά.
Όλα τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και 8 θέματα είναι το άριστα.

1. Προσδιορίστε και σχεδιάστε τα υποσύνολα του \mathbb{C} που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$(a) |z - i| = |z - 1|, \quad (b) |z - i| = |z - 1| = |z + 1|.$$

2. Βρείτε μια απεικόνιση $w = f(z)$ που να απεικονίζει το πρώτο χωρίο στο δεύτερο σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

$$(a) \{z : \operatorname{Im} z \geq 2\} \rightarrow \{w : \operatorname{Re} w \geq 3\}, \quad (b) \{z : |z - 1| \leq 1\} \rightarrow \{w : |w - i| \leq 2\},$$

3. Δείξτε ότι το άθροισμα των κυβικών ριζών ενός οποιουδήποτε μιγαδικού αριθμού είναι 0.

4. Χωρίς τις εξισώσεις Cauchy-Riemann δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = \operatorname{Re} z$ δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη. Χρησιμοποιείστε τον ορισμό της παραγώγου μόνο.

5. Δείξτε την ανισότητα

$$\left| e^{2z+i} - e^{iz^2} \right| \leq e^{-2xy} + e^{2x}, \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{dz}{z(z-1)^2},$$

όπου C είναι ο κύκλος $|z| = 2$.

7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + 1}$$

(a) όπου C είναι ο κύκλος $|z - i| = 1$, και (b) όπου C είναι ο κύκλος $|z| = 2$.

8. Δείξτε την ανισότητα

$$\left| \oint_C \frac{e^{\bar{z}} dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{4\pi e^2}{3},$$

όπου C είναι ο κύκλος $|z| = 2$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η συνάρτηση στο ολοκλήρωμα δεν είναι αναλυτική.

9. (Bonus) Στην Άσκηση 8 δώστε ένα μικρότερο άνω φράγμα.