1. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(z) = z^2$. Περιγράψτε την εικόνα του χωρίου

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \ \frac{1}{2} \le |z| \le 2, \ \mathrm{Arg}z \in [\pi/4, \pi/2] \right\}.$$

Κάντε το ίδιο με τη συνάρτηση $g(z) = z^3$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $z \to \sqrt{z}$ μπορεί να οριστεί στο χωρίο αυτό ως μια συνεχής συνάρτηση και βρείτε την εικόνα του χωρίου μέσω αυτής της συνάρτησης.

2. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Cauchy-Riemann διερευνείστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες και σε ποια σημεία του πεδίου ορισμού τους.

$$f(z) = \overline{z}, \ f(z) = z - \overline{z}, \ f(z) = 2x + ixy^2, \ f(z) = e^x e^{-iy},$$
$$f(z) = e^{-x} e^{-iy}, \ f(z) = (x+iy)^3, \ f(z) = \tfrac{1}{x+iy}, \ f(z) = x^2 + y^2, \ (x+iy)y.$$