

1. Βρείτε τα όρια, αν υπάρχουν, των παρακάτω ακολουθιών

$$z_n = \frac{i}{n}, \quad w_n = (-i)^n, \quad u_n = \operatorname{Arg} \left(-1 + \frac{i}{n} \right), \quad v_n = e^{2\pi i n/5}, \quad s_n = \left(\frac{1-i}{4} \right)^n.$$

2. Αποδείξτε τη συνέχεια της συνάρτησης $f(z) = \bar{z}$ σε κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$.

3. Αποδείξτε τη συνέχεια της συνάρτησης $f(z) = z^2$ σε κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$.

4. Αποδείξτε τη συνέχεια της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z^2}$ σε κάθε $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5. Γράψτε τις παρακάτω συναρτήσεις $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ στη μορφή $u(x, y) + iv(x, y)$, όπου $u, v \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$:

$$f(z) = \frac{z+i}{z^2+1}, \quad g(z) = \frac{2z^2+3}{|z-1|}.$$

6. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμες

$$z \rightarrow \operatorname{Re} z, \quad z \rightarrow \operatorname{Im} z, \quad z \rightarrow |z|.$$