Όλες οι καμπύλες είναι θετικά προσανατολισμένες εκτός αν προσδιορίζεται διαφορετικά.

---

1. Αν η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ και $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ είναι η σειρά Laurent για $|z| > 1$ δείξτε η σειρά δεν είναι τερματιζόμενη προς το $-\infty$, υπάρχουν δηλ. οσοδήποτε μεγάλα $n > 0$ τέτοια ώστε $a_{-n} \neq 0$.

2. (a) Αν η f είναι ακέραια συνάρτηση και $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ δείξτε, χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό της παραγώγου, ότι και η g είναι ακέραια.

(b) Αν δύο ακέραιες συναρτήσεις ταυτίζονται στον πραγματικό άξονα, δείξτε ότι ταυτίζονται παντού.

(c) Αν μια ακέραια συνάρτηση f είναι πραγματική πάνω στον πραγματικό άξονα δείξτε ότι $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

3. Βρείτε τις ανωμαλίες και τα αντίστοιχα υπόλοιπα για τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$(a)\ \frac{e^3 z}{z-2}, \quad (b)\ \frac{z+1}{z^2-3z+2}, \quad (c)\ \frac{\cos z}{z^2}, \quad (d)\ \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3.$$

4. Αν η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 δείξτε ότι $\operatorname{Res}(f'; z_0) = 0$.

5. Αν η f έχει πόλο τάξης m στο z_0 δείξτε ότι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; z_0\right) = m.$$