

Όλες οι καμπύλες είναι θετικά προσανατολισμένες εκτός αν προσδιορίζεται διαφορετικά.

1. Βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)} dz$$

όπου C είναι ο κύκλος $|z| = 4$. Ομοίως για τον κύκλο $|z-2| = 2$.

2. Αν C είναι ένας οποιοσδήποτε κύκλος που δεν περνάει από τα σημεία $0, \pm 1$ πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει το ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{1}{z+1} + \frac{10}{z} + \frac{100}{z-1} dz;$$

3. (a) Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής και άρτια και C είναι ο κύκλος $|z| = 1$ δείξτε ότι

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

(b) Αν, επιπλέον, η συνάρτηση είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ δείξτε το ίδιο αν C είναι οποιαδήποτε απλή κλειστή καμπύλη που γυρνάει μια φορά γύρω από το 0 .

(c) Βρείτε μια συνεχή άρτια συνάρτηση και μια καμπύλη C όπως στο (b) τέτοια ώστε

$$\oint_C f(z) dz \neq 0.$$

4. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο z_0 και έχει μηδενικό εκεί τάξης m . Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(z) = f'(z)/f(z)$ έχει απλό πόλο στο z_0 με υπόλοιπο m .