

Όλες οι καμπύλες είναι θετικά προσανατολισμένες εκτός αν προσδιορίζεται διαφορετικά.

1. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$$

και σε ποια συνάρτηση συγκλίνει.

2. Βρείτε τη σειρά Taylor της $\cos z$ γύρω από το 0 παραγωγίζοντας κατά όρους τη σειρά Taylor της $\sin z$.

3. Βρείτε τους 3 πρώτους όρους (3 μικρότερες δυνάμεις) της σειράς Laurent της

$$\frac{1}{e^z - 1}$$

γύρω από το 0. Ποιος είναι ο δακτύλιος σύγκλισης;

4. Η f είναι αναλυτική στο χωρίο $r < |z - z_0| < R$ και φραγμένη από το M εκεί. Αν είναι $a_j, j \in \mathbb{Z}$, οι συντελεστές της σειράς Laurent της f στο δακτύλιο αυτό δείξτε τις ανισότητες

$$|a_j| \leq \frac{M}{R^j}, \quad |a_{-j}| \leq Mr^j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$