

Όλες οι καμπύλες είναι θετικά προσανατολισμένες εκτός αν προσδιορίζεται διαφορετικά.

1. Βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $\cos z$ γύρω από το $\pi/2$.
2. Υποθέστε ότι $f = g'$ στο χωρίο $|z - z_0| < r$. Υποθέστε ότι οι f, g είναι αναλυτικές στο χωρίο αυτό. Υποθέστε ακόμη ότι $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z - z_0)^n$ στο χωρίο αυτό. Βρείτε τη σειρά Taylor της f μέσω των g_n .
3. Βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $\text{Log}(1 - z)$ γύρω από το 0. Πού συγκλίνει;
4. Βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}$$

με κέντρο το $1/2$. Να προσδιορίσετε σε ποιο δίσκο συγκλίνει η δυναμοσειρά αυτή.

Επαναλάβετε το ίδιο ερώτημα με κέντρο στο $1/3$.

Υπόδειξη: Γράψτε $w = z - \frac{1}{2}$. Τότε

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{2}{1 - 2w} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2w)^n.$$

Επαναλάβετε το ίδιο ερώτημα με κέντρο στο 2.

5. Υποθέστε ότι η f είναι αναλυτική στο χωρίο $|z| < 1$ και ότι $f \equiv 0$ πάνω στον πραγματικό άξονα. Δείξτε ότι $f \equiv 0$ στο χωρίο $|z| < 1$.

Υπόδειξη: Οι τιμές της f πάνω στον πραγματικό άξονα αρκούν για να προσδιορίσουν όλες τις παραγώγους της στο 0.