Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Ασκήσεις Νο 11

---

1. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο δακτύλιο $1 \le |z| \le 2$. Υποθέστε επίσης ότι $|f(z)| \le 3$ για $|z| = 1$ και ότι $|f(z)| \le 12$ για $|z| = 2$. Δείξτε ότι
$$|f(z)| \le 3|z|^2, \quad (1 \le |z| \le 2).$$

2. Έστω ότι η f είναι αναλυτική πάνω στην απλή κλειστή καμπύλη C και στο εσωτερικό της. Υποθέστε ακόμη ότι $|f(z) - 1| < 1$ για κάθε $z \in C$. Δείξτε ότι η f δε μηδενίζεται στο εσωτερικό της καμπύλης C.

3. Δείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο $p(z)$ βαθμού n
$$p(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_n z^n,$$
ισχύει
$$p_j = \frac{p^{(j)}(0)}{j!}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$
Για κάθε τέτοιο πολυώνυμο και με $M = \max_{|z|=1} |p(z)|$ δείξτε ότι $|p_j| \le M$, για $j = 0, 1, \ldots, n$.

4. Υποθέστε ότι η f είναι αναλυτική στο $|z| < 1$ και ότι
$$|f(z)| \le \frac{1}{1 - |z|}, \quad (|z| < 1).$$
Δείξτε ότι
$$\left|f^{(n)}(0)\right| \le \frac{n!}{R^n(1 - R)}, \quad (0 < R < 1).$$
Ποια τιμή πρέπει να επιλέξουμε για το R ώστε να πάρουμε το μικρότερο άνω φράγμα;

5. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο $|z| < r$ και ότι εκεί ισχύει $|f(z)| \le M$. Δείξτε ότι
$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n! M}{(r - |z|)^n}, \quad (|z| < r).$$

6. Έστω ότι η f είναι ακέραια συνάρτηση και ότι
$$|f(z)| \le |z|^5,$$
για όλα τα z με $|z| \ge 1$. Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού μέχρι 5.