Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Ασκήσεις Νο 10

---

1. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $e^{f(z)}$ δείξτε ότι η αρχή μεγίστου ισχύει και για το πραγματικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης f, και φυσικά και για το φανταστικό μέρος: καμία από αυτές τις δύο συναρτήσεις δε μπορεί να έχει τοπικό μέγιστο. Δείξτε ότι δε μπορούν να έχουν ούτε τοπικό ελάχιστο.

2. Βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο (και πού λαμβάνονται αυτές οι τιμές) για την $\operatorname{Re} f$ όπου $f(z) = e^z$ στο χωρίο

$$[0,1] \times [0,\pi].$$

3. Αν η f είναι αναλυτική στο z και $f(z) \neq 0$ δείξτε ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η τιμή $|f(z)|$ να μην είναι η ελάχιστη τιμή της $|f(w)|$ για $|w - z| \leq r$. *Υπόδειξη:* Θεωρείστε την $g(z) = 1/f(z)$.

4. Βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της απόλυτης τιμής της συνάρτησης $f(z) = (z - 2i)^3$ για $|z| \leq 1$.