Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς ως μέρος της προετοιμασίας σας για το ενδιάμεσο διαγώνισμα.

1. Υπολογίστε το πραγματικό και φανταστικό μέρος του $\dfrac{i-4}{2i-3}$.

2. Υπολογίστε το μέτρο και το συζυγή των αριθμών $(1+i)^6,\ i^{17}$.

3. Γράψτε στη μορφή $x+iy$ τους αριθμούς .

$$1/(1-i),\ 1/(2\sqrt{3}-2i),\ \frac{1+4i}{3+2i},\ e^{-2\pi i/3},\ 3e^{2\pi i/4}.$$

4. Γράψτε τους παρακάτω αριθμούς σε τριγωνομετρική μορφή $re^{i\theta}$.

$$8,\ 6i,\ \left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^7.$$

5. Ας είναι $z=1+2i,\ w=2-i$. Υπολογίστε

$$z+3w,\ \overline{w}-z,\ z^3,\ \mathrm{Re}\,(w^2+w),\ z^2+\overline{z}+i.$$

6. Υπολογίστε τις τετραγωνικές ρίζες του $-1-i$.

7. Υπολογίστε τις κυβικές ρίζες του -8.

8. Δείξτε ότι δεν υπάρχει $z\in\mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $|z|-z=i$.

9. Βρείτε όλους τα $z\in\mathbb{C}$ τέτοια ώστε $z^2\in\mathbb{R}$.

10. Απλοποιήστε τους παρακάτω αριθμούς

$$i^{999},\ i^3+i^6+i^9,\ \frac{1+2i}{3-4i}-\frac{2-i}{5i^3},\ \frac{|1+i|}{1-i}.$$

11. Λύστε τις παρακάτω εξισώσεις

$$z^2+5=0,\ z^2-4z+5=0,\ z^4+1=0,\ 32z^5-1=0,\ z+i=\frac{1}{z}+\frac{1}{i}.$$

12. Βρείτε μια έκφραση για το $\sin(3\theta)$ μέσω των $\sin\theta,\cos\theta$.

13. Αποδείξτε τον κανόνα του παραλληλογράμμου

$$|z-w|^2+|z+w|^2=2(|z|^2+|w|^2).$$

14. Περιγράψτε τα χωρία του $\mathbb{C}$ που ορίζονται από κάθε μια από τις παρακάτω σχέσεις

$$|z-(3+2i)|=5,\ |z-2+i|=|1+3i|,\ |z+2i|=2,\ |z-4|=0.$$

15. Περιγράψτε τα χωρία του $\mathbb{C}$ που ορίζονται από κάθε μια από τις παρακάτω σχέσεις

$$|z+3|=|z-4i|,\ |z+1|=2|z-1|,\ \frac{\pi}{4}\le \mathrm{Arg}z\le\frac{\pi}{2},\ \mathrm{Arg}\frac{z-1}{z+1}=\frac{\pi}{4}.$$

16. Περιγράψτε τα χωρία του $\mathbb{C}$ που ορίζονται από κάθε μια από τις παρακάτω σχέσεις

$$|z+3|<2,\ |\mathrm{Im}\,z|<1,\ 1<|z-1|<2,\ |z-1|+|z+1|\le 2.$$

17. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις του $z=x+iy$ ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann;

$$e^{-x}e^{-iy},\ 2x+ixy^2,\ x^2+iy^2,\ e^xe^{-iy},\ \mathrm{Im}\,z, |z|^2,\ \overline{z}.$$

18. Ορίζουμε

$$\cosh z=(e^z+e^{-z})/2,\ \sinh z=(e^z-e^{-z})/2.$$

Αποδείξτε

$$\begin{aligned}\sin z&=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y\\ \cos z&=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y\\ |\sin z|^2&=\sin^2 x+\sinh^2 y\\ |\cos z|^2&=\cos^2 x+\sinh^2 y\end{aligned}$$

19. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης κάθε μιας από τις παρακάτω δυναμοσειρές.

$$\sum_{k\ge 0} \cos kz^k,\ \sum_{k\ge 0} 4^k(z-2)^k,\ \sum_{k\ge 0} \frac{z^k}{k^k},\ \sum_{k\ge 1} \frac{(-1)^k}{k} z^{k(k+1)},\ \sum_{k\ge 0} z^{k!}.$$

20. Βρείτε ένα απλό τύπο για κάθε μια από τις παρακάτω σειρές.

$$\sum_{k\ge 0} \frac{z^{2k}}{k!},\ \sum_{k\ge 1} k(z-1)^{k-1},\ \sum_{k\ge 2} k(k-1)z^k.$$

21. Για ποια z συγκλίνει η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$;

22. Υποθέτοντας γνωστή τη σειρά Taylor της $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ βρείτε τις σειρές Taylor γύρω από το 0 για τις $\sin z$, $\cos z$.

23. Υποθέτοντας γνωστή τη σειρά Taylor της $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ δείξτε ότι η παράγωγος της e^z είναι ο εαυτός της. Ομοίως βρείτε τις παραγώγους των $\sin z, \cos z$ από τις σειρές Taylor τους.

24. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\oint_{ABC} \overline{z}\, dz$, όπου ABC είναι το τρίγωνο που συνδέει τα σημεία $A=0, B=1, C=i$ με τη θετική φορά. Ομοίως το ολοκλήρωμα $\displaystyle\oint_{ABC} \mathrm{Re}\, z\, dz$. Εξαρτώνται ή όχι τα παραπάνω ολοκληρώματα από το ποια είναι η κλειστή καμπύλη ολοκλήρωσης;

25. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα όπου C είναι το τετράγωνο με κορυφές τους αριθμούς $\pm 4 \pm 4i$, με θετική φορά.

$$\oint_C \frac{e^z}{z^3} dz,\ \oint_C \frac{e^z}{(z-\pi i)^2} dz,\ \oint_C \frac{\sin 2z}{(z-\pi)^2} dz,\ \oint_C \frac{e^z \cos z}{(z-\pi)^3} dz.$$

Πώς αλλάζει η απάντηση στα παραπάνω αν η καμπύλη C είναι το ίδιο τετράγωνο αλλά με δύο περιστροφές;

26. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C \frac{z}{z^2+4} dz$ πάνω από τον κύκλο $|z|=3$ με τη θετική φορά.

27. Αν η f είναι αναλυτική στον κλειστό δίσκο $|z-a| \le r$ δείξτε ότι ισχύει $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\, d\theta$ (ιδιότητα μέσου όρου).

28. Αφού βρείτε τις σταθερές A και B τέτοιες ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i}$$

υπολογίστε το $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{ze^z}{z^2+1} dz$.

29. Γνωρίζουμε τον τύπο του Cauchy $f(z) = \displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw$ εφόσον η f είναι αναλυτική στην C και στο εσωτερικό της. Δείξτε ότι ισχύει το ίδιο και αν η f είναι αναλυτική στο εσωτερικό αλλά απλά συνεχής στο κλειστό σύνολο που απαρτίζεται από το εσωτερικό της C και την ίδια τη C. Για απλότητα μπορείτε να υποθέσετε ότι η C είναι ένας κύκλος και z ένα σημείο στο εσωτερικό του.

30. Ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ της μορφής

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Ο φυσικός αριθμός N ονομάζεται βαθμός του πολυωνύμου (υποθέτουμε $a_N \ne 0$ ή $a_{-N} \ne 0$). Πόσες ρίζες το πολύ μπορεί να έχει ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού N στο διάστημα $[0, 2\pi)$;