



ΜΙΧΑΛΗΣ ΚΟΛΟΥΝΤΖΑΚΗΣ, Καθηγητής

Ηράκλειο, 23/11/2007

Φθινοπωρινό Εξάμηνο 2007-08

Μιγαδική Ανάλυση

Υπόδειγμα Δεύτερου Διαγωνίσματος (Διάρκεια 1 ώρα με κλειστές σημειώσεις)

1. Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(z) = (z-2)^{-1}$ σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης;
2. Ποιες είναι και τι είδους είναι οι μεμονωμένες ανωμαλίες των συναρτήσεων
 - (α) $f(z) = \sin z/z$,
 - (β) $g(z) = \exp((z-1)^{-1})$,
 - (γ) $h(z) = (z-i)^{-1} + (z-i)^{-2}$;
3. Αν $|f(z)| \leq 1$ για $|z| \leq 1$ και η f είναι αναλυτική στο σύνολο $\{|z| \leq 1\}$ και έχει μηδενικό δεύτερης τάξης στο 0, δείξτε ότι $|f(z)| \leq |z|^2$, για $|z| \leq 1$.
4. Η f είναι αναλυτική στο τετράγωνο $Q = [-R, R] \times [-R, R]$ και ισχύει $|f(z)| \leq M$ για $z \in Q$. Δείξτε ότι

$$|f'(0)| \leq \frac{4M}{\pi R}.$$

Μπορεί να βελτιωθεί η σταθερά $4/\pi$;