



ΜΙΧΑΗΛΗΣ ΚΟΛΟΥΝΤΖΑΚΗΣ, Καθηγητής

Φθινοπωρινό Εξάμηνο 2007-08

### Μιγαδική Ανάλυση

Υπόδειγμα Πρώτου Διαγωνίσματος (Διάρκεια 1 ώρα με κλειστές σημειώσεις)

1. Περιγράψτε τα υποσύνολα του  $\mathbb{C}$  που δίνονται από τις σχέσεις: (α)  $|z + i - 1| > 1$ , (β)  $(\Re z)^2 < \Im z$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος του  $z$ ), (γ)  $\frac{1}{z} = \bar{z}$ , (δ)  $|z| > |z - 2|$ .
2. (α) Αποδείξτε ότι για  $z \in \mathbb{C}$  και  $N \geq 1$  φυσικό αριθμό ισχύει  $1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1} = \frac{1-z^N}{1-z}$ .  
(β) Βρείτε ένα τύπο για τη σειρά  $\sum_{n \geq 0} z^n$ , για  $|z| < 1$ .  
(γ) Βρείτε ένα τύπο για τη σειρά  $\sum_{n \geq 1} nz^n$ , για  $|z| < 1$ .
3. Υποθέστε γνωστή τη δυναμοσειρά  $e^z = \sum_{n \geq 0} z^n/n!$  και υπολογίστε μια δυναμοσειρά για τις συναρτήσεις  $\sin z$ ,  $\cos z$ .
4. Αν  $f$  ακέραια δείξτε ότι αν  $a \in \mathbb{C}$  και  $C$  είναι ένας κύκλος που περιέχει το  $a$  στο εσωτερικό του τότε

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^2}.$$