Μιγαδική Ανάλυση (Μ 211), Φθινόπωρο 2007-08

Ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης

Μιχ. Κολουντζάκης, 4 Δεκεμβρίου 2007

Πρόβλημα 1. *Αν η συνάρτηση* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *είναι αναλυτική* ($\mathbb{D} = D(0,1)$ *είναι ο μοναδιαίος δίσκος) και* $f(0) = a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, *τότε ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το* $|f(w)|$ *για κάποιο σταθερό σημείο* $w \in \mathbb{D}$*;*

Η λύση δίνεται ως εξής.

Έστω $B_a(z) = (z-a)(1-\overline{a}z)^{-1}$, $a \in \mathbb{D}$, ο συνηθισμένος διγραμμικός μετασχηματισμός που στέλνει $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $a \to 0$ και το μοναδιαίο κύκλο στον εαυτό του. Η συνάρτηση

$$g(z) = B_a(f(z))$$

είναι $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ και στέλνει $0 \to 0$, άρα από το λήμμα του Schwarz έχουμε $|g(z)| \le |z|$, για $z \in \mathbb{D}$, άρα $B_a(f(z)) \in D(0,|z|)$. Παίρνοντας προεικόνες έχουμε

$$f(z) \in B_a^{-1}(D(0,|z|)) = B_{-a}(D(0,|z|))$$

αφού $B_a^{-1} = B_{-a}$.

Άρα για να βρούμε ένα άνω φράγμα για την τιμή $|f(z)|$ χρειαζόμαστε να ξέρουμε κάτι για την εικόνα ενός δίσκου $D(0,r)$ υπό ένα διγραμμικό μεταχσηματισμό.

Λήμμα 1. *Αν* $b = \rho e^{i\theta}$ *τότε*

$$\max_{|z| \le r} |B_b(z)| = \frac{\rho + r}{1 + \rho r}.$$

Το μέγιστο αυτό πιάνεται όταν $|z| = r$ *και* $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} b + \pi$.

Απόδειξη. Από την Αρχή Μεγίστου μπορούμε να περιοριστούμε σε $|z| = r$.

Αν επιλέξουμε $z = re^{i(\pi+\theta)}$ τότε έχουμε μετά από απλές πράξεις $|B_b(z)| = \frac{\rho+r}{1+\rho r}$, πράγμα που δείχνει ότι το ανωτέρω μέγιστο είναι τουλάχιστον $\frac{\rho+r}{1+\rho r}$.

Τετραγωνίζοντας, αρκεί συνεπώς να δείξουμε την ανισότητα

$$\left| \frac{z-b}{1-\overline{b}z} \right|^2 \le \frac{(|z|+|b|)^2}{(1+|z||b|)^2}. \tag{1}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $|w|^2 = w\overline{w}$ και κάνοντας πράξεις στο αριστερό μέλος παίρνουμε ότι αυτό ισούται με

$$\frac{A - 2\Re(z\overline{b})}{B - 2\Re(z\overline{b})}$$

ενώ κάνοντας τις πράξεις στο δεξί μέλος παίρνουμε ότι αυτό ισούται με

$$\frac{A + 2|bz|}{B + 2|bz|},$$

όπου

$$A = |z|^2 + |b|^2, \quad B = 1 + |b|^2|z|^2.$$

Επίσης $B \ge A$ αφού

$$B - A = 1 + |b|^2|z|^2 - |z|^2 - |b|^2 = (1-|z|^2)(1-|b|^2) \ge 0$$

επειδή $b, z \in \mathbb{D}$.

Είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι αν $x \geq 0, \beta \geq \alpha \geq 0$ τότε

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\alpha + x}{\beta + x}.$$

Εφαρμόζουμε αυτό με $\alpha = A - 2\Re(z\bar{b})$, $\beta = B - 2\Re(z\bar{b})$ και $x = 2|bz| - 2\Re(z\bar{b}) \geq 0$ και παίρνουμε τη ζητούμενη ανισότητα.
$\square$

Επανερχόμενοι στο αρχικό μας πρόβλημα, έχουμε

$$f(z) \in B_{-a}(D(0, |z|))$$

άρα, από το Λήμμα με $b = -a, r = |z|$ έχουμε

$$|f(w)| \leq \max_{|\zeta| \leq |w|} |B_{-a}(\zeta)| = \frac{|w| + |a|}{1 + |w||a|}.$$

Απομένει να βεβαιωθούμε ότι υπάρχει $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ με $f(0) = a$ τέτοια ώστε

$$|f(w)| = \frac{|w| + |a|}{1 + |w||a|}.$$

Ως τέτοια f δοκιμάζουμε μια συνάρτηση της μορφής

$$f(z) = B_{-a}(e^{ix} z), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Τέτοιες συναρτήσεις πληρούν φυσικά τα $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ και $0 \to a$. Επιλέγουμε το x ως $x = \mathrm{Arg}\,(a/w)$ ούτως ώστε οι αριθμοί a και $e^{ix} w$ να έχουν το ίδιο όρισμα. Έχουμε λοιπόν

$$|f(w)| = \left| \frac{e^{ix} w + a}{1 + e^{ix} \overline{a} w} \right| = \frac{|w| + |a|}{1 + |w||a|},$$

ως είχαμε να δείξουμε.