

Μιγαδική Ανάλυση – Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Δεύτερο Διαγώνισμα (Διάρκεια 1 ώρα με κλειστές σημειώσεις) – 28/11/07

1. Βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου της συνάρτησης $z^3 - z$ στο σύνολο $\{|z| \leq 1\}$. Επίσης πείτε σε ποια σημεία του συνόλου αυτού πιάνεται το μέγιστο.
2. Αν $\mathbb{D} = \{|z| \leq 1\}$ και η αναλυτική $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ικανοποιεί $f(i/2) = 0$, βρείτε ποια είναι η μέγιστη τιμή του $|f(-i/2)|$ υπό αυτές τις συνθήκες.
3. Μια ακέραια συνάρτηση $f(z)$ έχει ρίζες στα σημεία $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ (τα a_j είναι διαφορετικά μεταξύ τους) πολλαπλότητας m_1, \dots, m_k αντίστοιχα. Περιγράψτε τις μεμονωμένες ανωμαλίες της συνάρτησης $1/f(z)$.
4. Έστω f ακέραια συνάρτηση που παίρνει πραγματικές τιμές στον πραγματικό άξονα και φανταστικές τιμές στον φανταστικό άξονα. Δείξτε ότι $f(-z) = -f(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Όλες οι απαντήσεις σας θα πρέπει να είναι πλήρως αιτιολογημένες. Αναιτιολόγητες σωστές απαντήσεις δεν παίρνουν καθόλου πόντους.