

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως αντιγραφή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Τελικό Διαγώνισμα - 8 Ιανουαρίου 2026

Διάρκεια: 2 ώρες

1. Ο ορισμός της νόρμας τελεστή ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ αν $\|\cdot\|_\alpha$ είναι μια νόρμα επί του $\mathbb{C}^n$ είναι

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|Tx\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} : x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}.$$

(Μπορείτε να υποθέσετε γνωστό ότι η ποσότητα αυτή είναι μια νόρμα στο γραμμικό χώρο των πινάκων $\mathbb{C}^{n \times n}$.) Δείξτε ότι αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ έχει νόρμα $\|A\| < 1$ και $I \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας τότε ο πίνακας $I - A$ είναι αντιστρέψιμος.

2. (α) Δείξτε ότι ο γραμμικός χώρος $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένος με τον πολλαπλασιασμό $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$ είναι μια άλγεβρα.

(β) Δείξτε επίσης ότι όλες οι υποάλγεβρες του $\mathbb{R}^2$ είναι οι

$$\{(0, 0)\}, \quad \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}, \quad \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}, \quad \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R}^2.$$

3. Στο χώρο $C([0, 1])$ με την L^2 νόρμα βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = e^x$ από το γραμμικό υπόχωρο των συναρτήσεων της μορφής $f(x) = a + bx$, όπου $a, b \in \mathbb{C}$.

4. Αν $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ και $b \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο p βαθμού το πολύ $n-1$ τ.ώ.

$$p^{(k)}(b) = a_k, \quad \text{για } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

5. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη με $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $I = \int_a^b f(x) dx$. Διαμερίζουμε το $[a, b]$ σε N ίσα διαστήματα και εφαρμόζουμε στο καθένα τον κανόνα ολοκλήρωσης αριστερού σημείου και έτσι προκύπτει η προσεγγιστική τιμή $\tilde{I}$ για το I . Δείξτε ότι

$$|I - \tilde{I}| \leq \frac{M(b-a)^2}{N}.$$

6. (Συνέχεια του προβλήματος 5 με ίδιες υποθέσεις.) Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N_0 τ.ώ. αν $N \geq N_0$ ισχύει

$$|I - \tilde{I}| \leq \left(\int_a^b |f'(x)| dx + \epsilon \right) \frac{b-a}{N} \leq (M(b-a) + \epsilon) \frac{(b-a)}{N}.$$