ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ, ΤΜ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, ΑΝΟΙΞΗ 2013-14, ΜΙΧ. ΚΟΛΟΥΝΤΖΑΚΗΣ

Ομάδα ασκήσεων Νο 3

Πρόβλημα 1. Σε ένα μετρικό χώρο X ένα σύνολο F λέγεται κλειστό αν κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σημείων του συγκλίνει μέσα στο F. Ένα σύνολο K λέγεται συμπαγές αν κάθε ακολουθία στοιχείων του K έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του K. Δείξτε ότι αν F κλειστό, K συμπαγές και $F \subseteq K$ τότε και F συμπαγές (δηλ. *κλειστά υποσύνολα συμπαγών είναι συμπαγή*).

Πρόβλημα 2. Στη διάρκεια του μαθήματος χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση e^x δε μπορεί να ταυτίζεται με πολυώνυμο σε ένα διάστημα $[a, b]$. Ο τρόπος που το δείξαμε ήταν ότι κάναμε την παρατήρηση ότι η $(n + 1)$-τάξης παράγωγος ενός πολυωνύμου βαθμού $\le n$ είναι πάντα ίση με 0 ενώ όλες οι παράγωγοι της e^x ισούνται με e^x.
(α) Δείξτε ότι η e^x δε μπορεί να ταυτίζεται με κάποιο πολυώνυμο $p(x)$ για όλα τα σημεία μιας ακολουθίας $x_n \in \mathbb{R}$ που συγκλίνει στο $+\infty$ (ομοίως αν συγκλίνει στο $-\infty$).
(β) (Δυσκολότερο) Αν $\mathbb{R} \ni x_n \to 0$ δείξτε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε $p(x_n) = e^{x_n}$ για όλα τα n.

Πρόβλημα 3. Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα για τη νόρμα δείξτε την ανισότητα $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$ για κάθε x, y στο γραμμικό χώρο με νόρμα X.

Πρόβλημα 4. Αποδείξτε ότι η ισοδυναμία νορμών είναι σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου όλων των δυνατών νορμών ενός γραμμικού χώρου V.

Πρόβλημα 5. Ας είναι $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με $a < b < c < d$ και έστω X ο γραμμικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων $[a, b] \cup [c, d] \to \mathbb{C}$ και Y ο γραμμικός υπόχωρος του X που αποτελείται από εκείνες τις συναρτήσεις που είναι ταυτοτικά ίσες με το 0 στο διάστημα $[a, b]$.
(α) Η νόρμα που θεωρούμε πάνω στον X είναι η $\|\cdot\|_\infty$. Υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση των στοιχείων του X από στοιχεία του Y; Είναι μοναδική;
(β) Ίδιο ερώτημα αλλά με τη νόρμα $\|\cdot\|_1$.

Πρόβλημα 6. Αποδείξτε το θεώρημα Heine-Borel στο διάστημα $[0, 1]$. Δείξτε δηλ. ότι αν $x_n \in [0, 1]$ τότε υπάρχει υπακολουθία της x_n που συγκλίνει σε κάποιο σημείο του $[0, 1]$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο το ότι το $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, ότι δηλ. κάθε ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα.

Χωρίστε το διάστημα στα δύο:
$$[0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1].$$
Σίγουρα ένα από τα δύο διαστήματα θα περιέχει άπειρους όρους της x_n. Ξεχάστε το άλλο διάστημα και επικεντρώστε την προσοχή σας σε αυτό. Ξαναχωρίστε.