Πανεπιστημιο Κρητης, Τμ. Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογες, Άνοιξη 2013-14, Μιχ. Κολουντζάκης

Ομάδα ασκήσεων Νο 11

Πρόβλημα 1. Βρείτε ένα κλειστό τύπο για το σύνθετο κανόνα ολοκλήρωσης με $2N$ ίσα διαστήματα που προκύπτει από τον κανόνα του μέσου σημείου για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$. Ποιο είναι το σφάλμα;

Πρόβλημα 2. Ας είναι $w(x) > 0$ μια συνάρτηση βάρους στο διάστημα $[a, b]$ και $Q_0(x), Q_1(x), \cdots$ η ακολουθία ορθογωνίων πολυωνύμων για το διάστημα αυτό και τη συνάρτηση βάρους $w(x)$. Ας είναι επίσης

$$I_*(f) = \sum_{j=1}^{n} c_j f(x_j)$$

ένας απλός κανόνας ολοκλήρωσης με τάξη $\geq 2n - 1$. Δείξτε ότι τα σημεία x_j είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $Q_n(x)$.

Δείξτε ότι η συνάρτηση $Q(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ είναι ορθογώνια προς τα $Q_0, Q_1, \cdots, Q_{n-1}$.

Πρόβλημα 3. Ας είναι $w(x) > 0$ μια συνεχής συνάρτηση βάρους στο διάστημα $[a, b]$ και $Q_0(x), Q_1(x), \cdots$ η ακολουθία ορθογωνίων πολυωνύμων για το διάστημα αυτό και τη συνάρτηση βάρους $w(x)$. Ας είναι $x_1, x_2, \ldots, x_n$ οι ρίζες του Q_n (για τις οποίες γνωρίζουμε ότι είναι όλες διαφορετικές και στο (a, b)) και $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_{n-1}$ δύο πολυώνυμα τέτοια ώστε κάθε ένα από τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι ρίζα τουλάχιστον ενός από τα $p(x), q(x)$. (Π.χ. μπορείτε να πάρετε στη θέση των $p(x), q(x)$ δύο από τα πολυώνυμα Lagrange που ορίζουν τα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_n$.)

Δείξτε ότι τα $p(x), q(x)$ είναι ορθογώνια ως προς το εσωτερικό γινόμενο που ορίζει στο $[a, b]$ η συνάρτηση $w(x)$.