Πανεπ. Κρητης, Τμ. Μαθηματικων, Θ. Προσεγγισης και Εφαρμογες, Ανοιξη 2010-11, Μιχ. Κολουντζακης

2ο φυλλάδιο ασκήσεων

Πρόβλημα 1. Βρείτε το μέτρο συνέχειας $\omega_f(\delta)$ της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.

Πρόβλημα 2. Αν $f : [1, \infty) \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, δείξτε ότι η f προσεγγίζεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[1, \infty)$ από συναρτήσεις της μορφής $p(1/x)$, όπου p πολυώνυμο.

Χρησιμοποιείστε το Θ. Weierstrass για τη συνάρτηση $f(1/x)$, αφού προηγουμένως δείξετε ότι είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα.

Πρόβλημα 3. Μια ακολουθία πολυωνύμων συγκλίνει στη συνάρτηση $f(x) = |x|$ ομοιόμορφα στο $[-1, 1]$. Δείξτε ότι η ακολουθία των βαθμών των πολυωνύμων αυτών συγκλίνει στο $+\infty$.

Αν όχι τότε υπάρχει μια υπακολουθία πολυωνύμων στην οποία οι βαθμοί είναι φραγμένοι από κάποιο αριθμό $M < \infty$. Δείξτε ότι το ομοιόμορφο όριο μιας τέτοιας ακολουθίας πολυωνύμων είναι αναγκαστικά πολυώνυμο.

Πρόβλημα 4. Αν $f \in C([-a, a])$ είναι μια άρτια συνάρτηση (δηλ. $f(-x) = f(x)$ για $x \in [-a, a]$) δείξτε ότι η f μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο $[-a, a]$ από μια ακολουθία πολυωνύμων από τα οποία απουσιάζουν οι περιττές δυνάμεις του x. Αποδείξτε μια αντίστοιχη πρόταση για περιττές συναρτήσεις.

Αν η ακολουθία πολυωνύμων $p_n(x)$ προσεγγίζει την $f(x)$ τότε η ακολουθία πολυωνύμων $(1/2)(p_n(x) + p_n(-x))$ προσεγγίζει τη συνάρτηση $(1/2)(f(x) + f(-x))$.

Πρόβλημα 5. Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε φραγμένο κλειστό διάστημα μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα από μια ακολουθία πολυωνύμων που έχουν *ρητούς* συντελεστές.

Πρόβλημα 6. Έστω μια ακολουθία σημείων $x_n \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$, τ.ώ. για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ το όριο

$$X_k = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^k$$

υπάρχει. Αποδείξτε ότι αν $f \in C([0, 1])$ τότε το όριο

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

υπάρχει.

Αποδείξτε το πρώτα για πολυωνυμικές συναρτήσεις και μετά χρησιμοποιείστε το Θ. Weierstrass.

Πρόβλημα 7. Αν $f \in C^1([0, 1])$ (αν δηλ. η f έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0, 1]$) δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τ.ώ.

$$\|f - p\|_\infty \le \epsilon, \quad \text{και} \quad \|f' - p'\|_\infty \le \epsilon.$$

Εφαρμόστε το Θ. Weierstrass στην f' και χρησιμοποιείστε ότι $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt$.

Πρόβλημα 8. Έστω $f \in C([0, 1])$ και N φυσικός αριθμός, $x_j = \frac{j}{N}$, για $j = 0, 1, \ldots, N$. Έστω $L_N(x)$ μια τμηματικά γραμμική και συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $L_N(x_j) = f(x_j)$ για $j = 0, 1, \ldots, N$. (Αυτή η συνάρτηση είναι μοναδική αφού οι τιμές της στα σημεία x_j είναι ίδιες με της συνάρτησης $f(x)$ και μέσα σε κάθε διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, καθορίζεται μονοσήμαντα από την απαίτηση να είναι γραμμική.) Δείξτε ότι $L_N \to f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Η συνάρτηση f είναι *ομοιόμορφα* συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ (αυτό είναι συνέπεια της συνέχειας της f στο ίδιο διάστημα).

Πρόβλημα 9. (Συνέχεια του Προβλήματος 8)
Έστω N φυσικός αριθμός και PL_N το σύνολο όλων των συναρτήσεων στο $[0, 1]$ που είναι συνεχείς και

τμηματικά γραμμικές με *κομβικά σημεία* τα $x_j = \frac{j}{N}$, $j = 0, 1, \ldots, N$. (Οι συναρτήσεις αυτές είναι δηλ. γραμμικές σε κάθε κλειστό διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$.)
(α) Δείξτε ότι το σύνολο PL_N είναι γραμμικός χώρος συναρτήσεων.
(β) Δείξτε ότι οι παρακάτω $N+1$ συναρτήσεις αποτελούν μια βάση του χώρου αυτού (και συνεπώς $\dim PL_N = N+1$):

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0 \text{ ή } x > 1/N \\ 1 - Nx & x \in [0, 1/N] \end{cases}$$

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < x_{j-1} \text{ ή } x > x_{j+1} \\ N(x - x_{j-1}) & \text{αν } x_{j-1} \le x \le x_j \\ 1 - N(x - x_j) & \text{αν } x_j \le x \le x_{j+1} \end{cases} \qquad (\text{για } 1 \le j \le N-1)$$

$$\phi_N(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < x_{N-1} \text{ ή } x > 1 \\ N(x - x_{N-1}) & \text{αν } x_{N-1} \le x \le 1 \end{cases}$$

Πρώτα απ' όλα σχεδιάστε τα γραφήματα των ϕ_j. Για το (β) υποθέστε ότι $f \in PL_N$ και γράψτε την f σα γραμμικό συνδυασμό των ϕ_j. Η γραμμική ανεξαρτησία των ϕ_j είναι συνέπεια του ότι σε κάθε x_j μόνο μία ϕ_j δεν είναι 0.

Πρόβλημα 10. (Συνέχεια του Προβλήματος 9)
Αν $f \in C([0,1])$ και ϕ_j είναι οι συναρτήσεις του Προβλήματος 9 βρείτε ένα άνω φράγμα για την ποσότητα $\|f - \ell\|_\infty$ μέσω του μέτρου συνέχειας της f, όπου $\ell \in PL_N$ είναι η συνάρτηση

$$\ell(x) = \sum_{j=0}^{N} f(j/N)\phi_j(x).$$